

КРЫЛОВЫЕ ПРОФИЛИ С ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМОМ КОНТУРОМ В ДИАПАЗОНЕ УГЛОВ АТАКИ

Д. Ф. Лазарев, Д. А. Фокин

НИИММ Казанского государственного университета
dmitri.lazarev@ksu.ru

В настоящее время активно развиваются методы проектирования профилей, использующих средства управления потоком. Например, для устранения нежелательного отрыва потока с поверхности крыла применяются устройства отбора воздуха. В работе рассматривается распределенный отбор внешнего потока через проницаемую часть поверхности профиля. Задача для полностью проницаемого профиля для фиксированного угла атаки была решена в [1] и для частично проницаемого профиля в [2]. В то же время для практического применения представляют интерес такие методы проектирования, которые давали бы желаемые свойства не при одном угле атаки, а в некотором диапазоне. Такая задача для непроницаемого профиля была решена Эпплером [3] и эта же задача но в несколько иной постановке, решена в [4] и в [5]. В настоящей работе рассматривается задача построения крылового профиля с частично проницаемым контуром в диапазоне углов атаки.

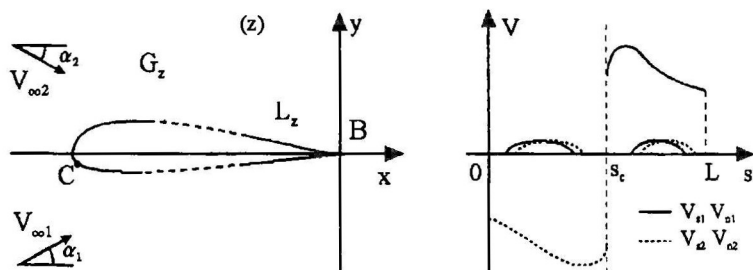


Рис. 1

1. Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ (рис. 1) искомый крыловой профиль L_z периметра L обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Начало координат совпадает с задней кромкой профиля B .

Хорда профиля направлена вдоль оси x . Контур профиля предполагается гладким, за исключением задней кромки, и проникаемым всюду, за исключением некоторых окрестностей передней критической точки и задней кромки профиля. Внутренний к области течения угол в точке B равен 2π . Дуговая координата s отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же так, что при возрастании s область течения остается слева.

Пусть $V_{\infty 1}$ и $V_{\infty 2}$ – скорости невозмущенного потока при обтекании профиля под углами атак α_1 и α_2 . На контуре L_z выбрана точка C с координатой s_c , разбивающая его на два участка. На участках $s \in [s_c, L]$ и $s \in [0, s_c]$ задаются соответственно распределения касательной скорости v_{s1} для режима обтекания со скоростью $V_{\infty 1}$ и углом атаки α_1 и v_{s2} для режима обтекания со скоростью $V_{\infty 2}$ и углом атаки α_2 (эти распределения предполагаются непрерывными и знакопостоянными). Нормальные распределения скорости задаются на всем периметре контура для обоих режимов обтекания. Точка s_c выбирается так, чтобы точка разветвления потока не находилась ни на одном из участков задания касательной скорости. Функции $v_{nj}(s)$, $j = 1, 2$, обращаются в нуль в некоторой окрестности точек $s = 0$, $s = s_{aj}$ (точек разветвления потока), $s = l$. Положительные значения v_n соответствуют отбору потока, отрицательные – вдуву. Требуется найти форму профиля и его аэродинамические характеристики.

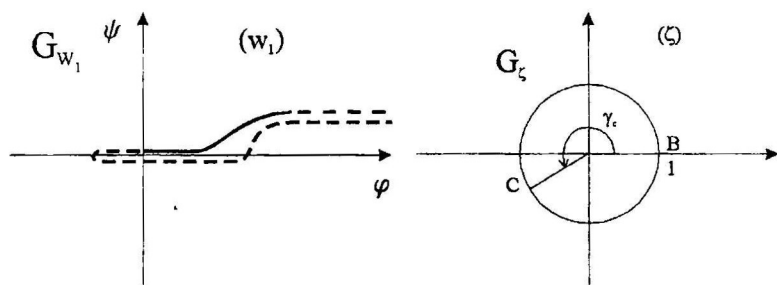


Рис. 2

2. Итерационный метод решения задачи. Рассмотрим в качестве G_z область в плоскости z , ограниченную контуром L_z и берегами разреза, проведенного по линии тока, сходящей с задней кромки профиля. Так как задача рассматривается в диапазоне

углов атак, то областей комплексного потенциала будет две. Границы области G_{w1} и G_{w2} в плоскости комплексного потенциала w (рис. 2, а), определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \int_{s_c}^s v_{s1}(s) ds, & \psi_1(s) &= \int_{s_c}^s v_{n1}(s) ds, & s &\in [s_c, l], \\ \varphi_2(s) &= \int_{s_c}^s v_{s2}(s) ds, & \psi_2(s) &= \int_{s_c}^s v_{n2}(s) ds, & s &\in [0, s_c].\end{aligned}$$

Для решения задачи необходимо построить конформные отображения $w_j(\zeta)$ ($j = 1, 2$) области G_ζ (рис. 2, б) на области G_{w1} и G_{w2} .

Пусть $w(\zeta)$ – комплексный потенциал обтекания проницаемого круга, а $w_0(\zeta)$ – комплексный потенциал обтекания непроницаемого круга, причем критические точки обоих потоков совпадают. Рассмотрим регулярную в области $|\zeta| \geq 1$ функцию

$$G(\zeta) = \ln \frac{dw}{dw_0} = \ln \left[\frac{dw}{d\zeta} / \frac{dw_0}{d\zeta} \right], \quad (1)$$

такую, что $\operatorname{Re} G(\infty) = 0$. При $\zeta = e^{i\gamma}$ имеем

$$G(e^{i\gamma}) = T(\gamma) + iR(\gamma),$$

где

$$T(\gamma) = \ln [u'(\gamma)/u_0'(\gamma)], \quad u_0(\gamma) = |w_0'(e^{i\gamma})|, \quad u(\gamma) = |w'(e^{i\gamma})|.$$

Кроме того,

$$R(\gamma) = \arg(dw) - \arg(dw_0) = \operatorname{arctg} \frac{v_n(s(\gamma))}{v_\tau(s(\gamma))}.$$

Здесь $s(\gamma)$ – функция, устанавливающая соответствие между точками контура профиля и точками окружности. Функции $T(\gamma)$ и $R(\gamma)$ связаны между собой интегралом Гильберта

$$T(\gamma) = -G(R, \gamma). \quad (2)$$

Будем считать, что известно начальное приближение $s(\gamma)$. Тогда из соотношения

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw_0} \frac{dw_0}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

с учетом (1) получим

$$\exp(-G(\zeta)) \frac{dw}{dz} dz = \frac{dw_0}{d\zeta} d\zeta. \quad (3)$$

Для каждого течения имеем свою функцию

$$G_j(\zeta) = \ln \frac{dw_j}{dw_{0j}}.$$

Переходя в выражении (3) на границу области и взяв модуль, получим два уравнения ($j = 1, 2$)

$$\exp(-T_j(\gamma(s))) |V_j(s)| ds = U_{0j}(\gamma) d\gamma, \quad (4)$$

где $V_j(s)$ – комплексно-сопряженная скорость. Проинтегрировав уравнения (4), с учетом (2) получим систему уравнений для определения функции $s(\gamma)$:

$$\begin{cases} \Phi_1(s) = \phi_{01}(\gamma), s \in [s_c, L], \gamma \in [\gamma_c, 0], \\ \Phi_2(s) = \phi_{02}(\gamma), s \in [0, s_c], \gamma \in [\gamma_c, 2\pi], \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\Phi_j(s) = \int_{s_c}^s \exp(-G(R_j, \gamma)) |V_j(s)| ds,$$

а $\phi_{0j}(\gamma)$ – вещественная часть комплексных потенциалов обтекания непроницаемого круга

$$\phi_{0j}(\gamma) = 2U_{\infty j}(\cos(\gamma - \beta_j) - \cos(\gamma_c - \beta_j)) - (\gamma - \gamma_c) \sin \beta_j, j = 1, 2.$$

Неизвестные параметры $U_{\infty 1}$, $U_{\infty 2}$ определяются из условия соответствия максимумов функций Φ_j и ϕ_{0j} . Тогда в системе (5) останется три неизвестных параметра – $\gamma_c, \beta_1, \beta_2$, которые определяются следующим образом. Рассмотрим тождество

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dw_1} \frac{dw_1}{dw_{01}} \frac{dw_{01}}{d\zeta} = \frac{dz}{dw_2} \frac{dw_2}{dw_{02}} \frac{dw_{02}}{d\zeta}. \quad (6)$$

Перейдя в (6) на бесконечность и на границу круга, можно получить следующие два соотношения

$$\Delta = \beta_1 - \beta_2 + R_{\infty 1} - R_{\infty 2}, \quad (7)$$

$$\frac{V_{s2}(s)}{V_{s1}(s)} = \frac{U_{\infty 2} \cos(\gamma/2 - \beta_2)}{U_{\infty 1} \cos(\gamma/2 - \beta_1)} \exp(T_2(\gamma) - T_1(\gamma)). \quad (8)$$

Из (8) получим два уравнения: при $s = s_c$ и при $s = L$ с учетом того, что $V_{s2}(L) = -V_{s2}(0)$. Добавляя к ним уравнение (7), приходим к системе

$$\begin{cases} \beta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1/k - \cos \Delta}{\sin \Delta} \right), \\ \beta_2 = \beta_1 - \Delta, \\ \gamma_c = 2 \left[\beta_1 - \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \Delta - a_2/k}{\sin \Delta} \right) \right], \end{cases}$$

где

$$k = \frac{U_{\infty 2}}{U_{\infty 1}}, \quad a_1 = -\frac{V_{s2}(0)}{V_{s1}(L)} \exp(T_1(0) - T_2(0)), \\ a_2 = -\frac{V_{s2}(s_c)}{V_{s1}(s_c)} \exp(T_1(s_c) - T_2(s_c)).$$

После определения $s(\gamma)$ можно найти вещественную часть функции

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)^{-1},$$

которая имеет вид

$$P(\gamma) = \ln \left[\frac{2U_{\infty j}}{V_{sj}(s(\gamma))^2 + V_{nj}(s(\gamma))^2} \exp(T_j(\gamma)) \right],$$

$j = 1$ при $\gamma \in [0, \gamma_c]$, $j = 2$ при $\gamma \in [\gamma_c, 2\pi]$. Затем по известной $\operatorname{Re} \omega(\zeta)$ можно восстановить распределения касательной скорости V_{sj} на всей поверхности профиля по формуле

$$V_{sj}(\gamma) = 2U_{\infty j} \cos(\gamma/2 - \beta) \exp(-P(\gamma) + T(\gamma)) \cos(R(\gamma)).$$

После нахождения распределений касательной скорости итерационный процесс повторяют. В качестве невязки рассматривался максимум разности между функциями $T_j(\gamma)$ на текущей и предыдущей итерациях. После завершения процесса форма профиля определяется соотношением

$$z(\zeta) = U_{\infty} e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)^{\epsilon-1} \exp(\omega(\zeta)) d\zeta.$$

Как и в случае непроницаемого профиля, для получения замкнутого проницаемого контура требуется выполнение определенных условий разрешимости. В рассматриваемой задаче невозможно добиться совпадения заданных скоростей на бесконечности $V_{\infty j}$ со скоростями, определяемыми в процессе решения. Можно задать лишь одно значение скорости на бесконечности. Для получения условий замкнутости контура используем то, что представления отображающей функции $z(\zeta)$ через $\omega(\zeta)$ совпадают в случае непроницаемого и проницаемого профилей. Следовательно, останутся неизменными и условия, гарантирующие замкнутость контура и выраженные через $P(\gamma)$ (см. [6]).

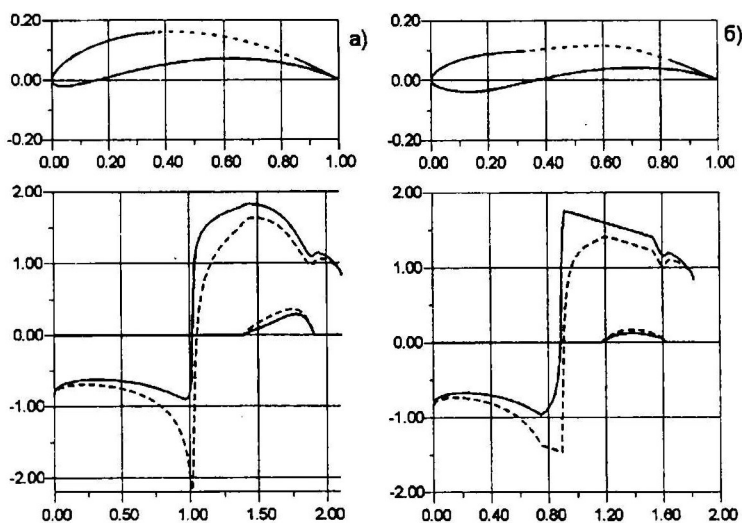


Рис. 3

3. Пример проектирования профиля с проницаемым контуром. Все реальные устройства отбора потока – это насосы, которые создают некоторую разность давления внутри и вне крыла. Поэтому для проектирования имеет смысл задавать не нормальное распределение скорости, а давление внутри крыла (P_0), пористости поверхности профиля для двух режимов обтекания ($k_j(s)$) и константу Бернулли (i_0) внешнего потока. При такой постановке задачи итерационный процесс несколько усложнится за счет того, что теперь на каждой итерации требуется пе-

рассчитывать распределения нормальных скоростей по поверхности профиля. Формула пересчета имеет вид (следует из интеграла Бернулли)

$$V_{nj}(s) = -\frac{1}{k_j(s)\rho} + \left(\frac{1}{(k_j(s)\rho)^2} - V_{sj}(s)^2 - 2P_0/\rho + 2i_0 \right)^{0.5}.$$

На первой итерации нормальное распределение скорости считается нулевым.

Для получения тестовых примеров была написана программа построения проницаемых профилей Жуковского. По полученным распределениям скорости решалась обратная задача (рис. 3,а) и сравнивались формы профилей (исходного и полученного). Погрешность расчета не превысила 2%. Как видно из рисунка, распределение касательных скоростей имеет значительный пик на нижней поверхности профиля. Это достаточно опасное явление, так как известно, что отрыв потока возникает в области резкого падения скорости.

Табл. 1

Профиль	α_1	c_{y1}	c_{x1}	α_2	c_{y2}	c_{x2}
а	3	1.8	0.18	-5	0.74	0.24
б	4	1.55	0.1	-4	0.48	0.12

Поэтому распределение касательной скорости было изменено. Были срезаны пики скоростей по верхней и нижней поверхности профиля. В результате решения обратной задачи получен разомкнутый контур, поскольку для срезанного распределения касательных скоростей условия разрешимости не выполняются. Замкнутый профиль получается в результате построения квазирешения (рис. 3,б). Характеристики профилей приведены в табл. 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00365).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О.М. *Построение проницаемого контура по заданному распределению скорости* // Сб. докладов Итоговой научной конференции Казанск. ун-та за 1960 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1961. – С. 88-89.

2. Е.Ю.Аристова, Н.Б.Ильинский, Д.А.Фокин. *Математическое моделирование распределенного отсоса потока в обратной краевой задаче аэрогидродинамики* // Матем. моделирование. – 1994. – Т.6. – N1.

3. Eppler R. *Airfoil design and data*. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 562 p.

4. Завадовский Н.Ю., Мелешко С.В., Русецкий А.А. *Задачи оптимизации формы крыловых профилей* // Тр. 10-го научн.-метод. семинара по гидродинамике судна. – Варна, 1983. – Т.2. – С. 1–16.

5. Елизаров А.М., Фокин Д.А. *Построение крыловых профилей, безотрывно обтекаемых в заданном диапазоне углов атаки* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – N3. – С. 157–164

6. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Потапев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики*. – М.: Наука, 1994. – 440 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Е. К. Липачёв

*Казанский государственный университет
evgeny.lipachev@ksu.ru*

С помощью метода граничных интегральных уравнений решается задача дифракции плоской электромагнитной волны на отражательной полуплоскости с конечным диэлектрическим включением. Доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи. Найдено интегральное представление этого решения в виде комбинации обобщенных потенциалов. Краевая задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Предложена вычислительная схема, основанная на использовании сплайновых методов решения интегральных уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть $a > 0$ – вещественное число.